

# Элементы теории множеств и алгебры логики

Босова Л. Л., Босова А. Ю. Информатика (базовый уровень). 10 класс



## Результат

Повторите:

- основные понятия, изученные в теме «Элементы теории множеств и алгебры логики».

Закрепите:

- навыки решения различных задач, связанных с темой «Элементы теории множеств и алгебры логики».

Подготовьтесь:

- к проверочной работе по теме «Элементы теории множеств и алгебры логики».



## Запомни. Важно

- **Множество** — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Для случая объединения трёх множеств формула имеет вид:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

- **Высказывание** — это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно.
- **Предикат** — это утверждение, содержащее одну или несколько переменных. Из имеющихся предикатов с помощью логических операций можно строить новые предикаты.
- **Таблица истинности логического выражения** — это таблица значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных.



## Обрати внимание

Аппарат алгебры логики позволяет применять к широкому классу логических задач универсальные методы, основанные на формализации условий задачи. К ним относятся методы:

- построения таблицы истинности по условию задачи и её анализ;
- составления и упрощения логического выражения.



## Разбираем вместе

1. **Множество** — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Формула включений-исключений позволяет вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).

Для случая объединения трёх множеств формула имеет вид:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

Аналогичные формулы справедливы и для пересечения множеств:

$$|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|;$$

$$|X \cap Y \cap Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cup Y| - |X \cup Z| - |Y \cup Z| + |X \cup Y \cup Z|$$

Подробнее об этом можно прочитать в § 17.

Выполним письменно в тетради **задание № 4 (с. 173)**.

В первую смену в лагере «Дубки» отдыхали: 30 отличников, 28 победителей олимпиад и 42 спортсмена. При этом 10 человек были и отличниками, и победителями олимпиад, 5 — отличниками и спортсменами, 8 — спортсменами и победителями олимпиад, 3 — и отличниками, и спортсменами, и победителями олимпиад. Сколько ребят отдыхало в лагере?

*Решение.*

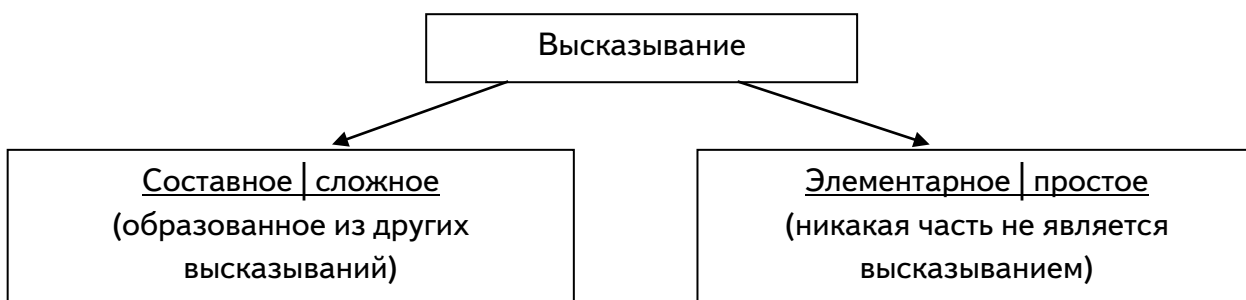
Пусть  $A$  — множество отличников,  $B$  — победителей олимпиад и  $C$  — спортсменов.

$$|A| = 30, |C| = 42, |B| = 28, |A \cap B| = 10, |A \cap C| = 5, |C \cap B| = 8, |A \cap B \cap C| = 3.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\ = 30 + 28 + 42 - 10 - 5 - 8 + 3 = 80.$$

*Ответ:* 80 человек отдыхали в лагере.

2. **Высказывание** — это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно.



Логические переменные		Логические операции					
		Отрицание	Конъюнкция	Дизъюнкция	Импликация	Строгая дизъюнкция	Эквиваленция
$A$	$B$	$\bar{A}$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \oplus B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1

Приоритеты логических операций:

- 1) отрицание;
- 2) конъюнкция;
- 3) дизъюнкция, строгая дизъюнкция;
- 4) импликация, эквиваленция.

Операции одного приоритета выполняются в порядке их следования, слева направо. Скобки меняют порядок выполнения операций.

**Предикат** — это утверждение, содержащее одну или несколько переменных.

Из имеющихся предикатов с помощью логических операций можно строить новые предикаты.

Подробнее об этом можно прочитать в § 18.

Выполним письменно **задание № 10 (с. 188)**.

Даны три числа в различных системах счисления:

$$A = 23_{10}, B = 23_8, C = 1A_{16}.$$

Переведите  $A$ ,  $B$  и  $C$  в двоичную систему счисления и выполните поразрядно логические операции  $(A \vee B) \& C$ . Ответ дайте в десятичной системе счисления.

*Решение.*

1) Переводим в двоичную систему:

- $A = 23_{10} = 16 + 4 + 2 + 1 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 1 = 10000 + 100 + 10 + 1 = 10111_2$ ;

- $B = X_8 = X_{10} = X_2$

$$B = 23_{8=2^3} = 2^4 + 3 \cdot 2^0 = 16 + 3 = 19_{10}; 19_{10} = 16 + 2 + 1 = 2^4 + 2^1 + 1 = 10000 + 10 + 1 = 10011_2;$$

- $C = 1A_{16} = \underbrace{0001}_{1} \underbrace{1010}_{10} = 11010_2$

2) Строим таблицу истинности для выражения  $(A \vee B) \wedge C$ .

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0

3) Переводим  $10010_2$  в десятичную систему счисления:

$$10010_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1 = 16 + 2 = 18_{10}$$

Ответ: 18.

3. **Таблица истинности логического выражения** — это таблица значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных.

Подробнее об этом можно прочитать в § 19.

Откройте учебник на с. 193. Прочитайте и проанализируйте задание и решение к нему в примере 3.

Самостоятельно выполните [задание № 7 \(с.196\)](#).

4. При увеличении количества логических переменных в выражении выполняют преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют **законы алгебры логики (свойства логических операций)**.

Логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности или аналитически, т. е. с помощью логического выражения.

Подробнее об этом можно прочитать в § 20.

Откройте учебник на с. 199. Прочитайте и проанализируйте задание и решение к нему в примере 2.

Используя основные законы алгебры логики (§ 20, с. 198) самостоятельно выполните [задание № 4 \(с. 207\)](#).

5.



В комбинационной схеме набор выходных сигналов в любой момент времени полностью определяется набором входных сигналов.

**Логический элемент** — дискретный преобразователь, который выдаёт после обработки двоичных сигналов значение одной из логических операций.

**Сумматор** — электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных чисел.

В цифровых автоматах с памятью набор выходных сигналов зависит не только от набора входных сигналов, но и от внутреннего состояния данного устройства. Такие устройства всегда имеют память.

**Триггер** — логический элемент, способный хранить один разряд двоичного числа.

Оперативная память современных компьютеров содержит миллионы триггеров.

Подробнее об этом можно прочитать в § 21.

Откройте учебник на с. 211. Прочитайте и проанализируйте задание и решение к нему в примере.

Используя основные законы алгебры логики (§ 20, с. 198) самостоятельно выполните **задание № 4 (с. 217)**.

6. *Основная идея метода рассуждений* состоит в том, чтобы последовательно анализировать всю информацию, имеющуюся в задаче, и делать на этой основе выводы.

Многие логические задачи связаны с рассмотрением нескольких конечных множеств и связей между их элементами. Для решения таких задач зачастую прибегают к помощи таблиц или графов. От того, насколько удачно выбрана их структура, во многом зависит успешность решения задачи.



Подробнее об этом можно прочитать в § 22.

Решите удобным вам методом задачи № 4 (с. 229) и № 5 (с. 229).

Почему вы выбрали именно этот метод?



### Сделай сам

1. Повторите главу 4.
2. Письменно выполните задания № 6 на с. 230; № 13 на с. 189; № 5 на с. 173; № 8 на с. 197; № 7 на с. 207.